

Mathematics

מבנים מתמטיקה

חוברת תרגילים

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – קורס ראשון

תוכן עניינים

3.....	הקדמה
4.....	גבולות של פונקציות
4.....	שאלה מספר 1 – חישוב גבול
5.....	שאלה מספר 2 – חישוב גבול
6.....	שאלה מספר 3 – חישוב גבול
7.....	שאלה מספר 4 – הערך השלם
8.....	הגדרת הגבול
8.....	שאלה מספר 5 – הגדרת הגבול
9.....	רציפות וגזירות
9.....	שאלה מספר 6 – רציפות וגזירות בנקודה
10.....	משפטים יסודיים
10.....	שאלה מספר 7 – מספר פתרונות למשוואה
11.....	שאלה מספר 8 – חד-חד-ערכיות ועל
12.....	שאלה מספר 9 – משפט לגרנז'
13.....	טור טיילור
13.....	שאלה מספר 10 – הערכת מספר באמצעות טור טיילור
14.....	שאלה מספר 11 – אי-שוויון בעזרת טור טיילור
15.....	חקירת פונקציה
15.....	שאלה מספר 12 – נקודות קיצון ונקודות פיתול
16.....	סדרות
16.....	שאלה מספר 13 – חישוב גבול
17.....	שאלה מספר 14 – חישוב גבול
18.....	שאלה מספר 15 – חישוב גבול
19.....	אינטגרלים לא מסוימים
19.....	שאלה מספר 16 – פירוק לשברים חלקיים

- 20.....שאלה מספר 17 – פירוק לשברים חלקיים
- 21.....שאלה מספר 18 – אינטגרציה בחלקים
- 22.....שאלה מספר 19 – אינטגרלים טריגונומטריים
- 23.....שאלה מספר 20 – אינטגרלים טריגונומטריים של פונקציות הפכות
- 24.....שאלה מספר 21 – אינטגרלים מידיים
- 25.....**אינטגרלים מסוימים**
- 25.....שאלה מספר 22 – אינטגרל מסוים
- 26.....שאלה מספר 23 – כלל לייבניץ
- 27.....**אינטגרלים מוכללים**
- 27.....שאלה מספר 24 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון
- 28.....שאלה מספר 25 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון
- 29.....שאלה מספר 26 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון
- 30.....שאלה מספר 27 – אינטגרל מוכלל מסוג שני
- 31.....שאלה מספר 28 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת התרגילים?

חוברת התרגילים מכילה את כל השאלות שאוהבים לשאול במבחנים ושמופיעות בכל סמסטר במבחנים. את החוברת הזאת בניתי לאחר שנים של ניסיון בהוראת הקורס, החל מהסמסטר השלישי שלי בטכניון שבו כבר התחלתי לתרגל את הקורס ועד היום. כל השאלות בחוברת הן שאלות ברמת בחינה שנועדו להכין אתכם באופן הטוב ביותר לקראת הבחינה. כדי לעבוד נכון עם החוברת, אנא שימו-לב לדגשים הבאים:

(1) הפתרונות באתר – לחוברת זו אין פתרונות כתובים, את הפתרונות המלאים ניתן למצוא בקורס המצולם באתר סטאדיס.

(2) נסו לפתור לבד – מומלץ מאוד לנסות לפתור כל שאלה בעצמכם, לפני שאתם צופים בפתרון ביחד איתי.

(3) לא להיתקע על שאלות – מצד שני, היזהרו שלא להיתקע יותר מידי זמן על שאלות – אם לא הצלחתם בעצמכם תוך 5 דקות, הפעילו את הסרטון וצפו בפתרון, הזמן שלכם יקר וצריך לנהל אותו נכון ויעיל.

(4) חזרתיות – כפי שהמורה שלי תמיד היה אומר:

"לפעמים עדיף לפתור אותו תרגיל פעמיים, מאשר שניים חדשים"

לכן טוב לחזור לתרגילים שכבר צפיתם בהם ולנסות לפתור אותם שוב, עד שהאסימון יפול. זכרו שאלו הן השאלות שמופיעות בכל סמסטר במבחנים, לכן כדאי להבין היטב איך פותרים אותן.

בהצלחה!

גבולות של פונקציות

שאלה מספר 1 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{\tan x}$$

שאלה מספר 2 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} \sin 2x}{x}$

שאלה מספר 3 – חישוב גבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot \arctan x \cdot (e^x - 1)}{\sin x \cdot \ln^2(x+1)}$$

חשב את הגבול הבא:

שאלה מספר 4 – הערך השלם

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x] \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x + 1] \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ([x] \cdot [x + 1]) \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (\text{ד})$$

הגדרת הגבול

שאלה מספר 5 – הגדרת הגבול

הוכח לפי הגדרת הגבול כי: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{3x-2} = -1$

רציפות וגזירות

שאלה מספר 6 – רציפות וגזירות בנקודה

הוכח / הפרך את הטענות הבאות עבור שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$:

(א) אם $f(x)$ לא רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ לא רציפה ב- x_0 אזי גם $\frac{f(x)}{g(x)}$ לא רציפה ב- x_0 .

(ב) אם $f(x)$ לא גזירה ב- x_0 ו- $g(x)$ לא גזירה ב- x_0 אזי גם $f(x)g(x)$ לא גזירה ב- x_0 .

משפטים יסודיים

שאלה מספר 7 – מספר פתרונות למשוואה

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + x + \sin x$. מצא את מספר השורשים הממשיים של f .

שאלה מספר 8 – חד-חד-ערכיות ועל

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^x + x + 1$

(א) הוכח כי הפונקציה חח"ע בכל \mathbb{R}

(ב) הוכח כי הפונקציה על \mathbb{R}

(ג) מצא כמה שורשים יש למשוואה $f(x) = 0$

(ד) הוכח כי f הפיכה וחשב את $(f^{-1})'(e+2)$

שאלה מספר 9 – משפט לגרנז'

הוכח כי לכל $x \geq 0$ מתקיים: $\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2}$.

טור טיילור

שאלה מספר 10 – הערכת מספר באמצעות טור טיילור

חשב את המספר $\sqrt{65}$ בדיוק של אלפית.

שאלה מספר 11 – אי-שוויון בעזרת טור טיילור

הוכח שלכל $x > 0$ מתקיים אי-השוויון הבא: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

חקירת פונקציה

שאלה מספר 12 – נקודות קיצון ונקודות פיתול

הוכח / הפרך את הטענות הבאות:

- (א) אם בנקודה x_0 הפונקציה f מוגדרת, אבל $f'(x_0)$ לא קיימת, אזי x_0 לא נקודת קיצון.
- (ב) אם בנקודה x_0 הפונקציה f גזירה פעמיים, $f'(x_0) = 0$ ו- x_0 אינה נקודת קיצון מקומית, אזי בנקודה זו יש פיתול.
- (ג) אם x_0 היא נקודת קיצון מקומית של הפונקציה אזי בהכרח היא לא נקודת פיתול שלה.

סדרות

שאלה מספר 13 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(2n)}{\ln(n)} \right)^{\ln n}$$

שאלה מספר 14 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n$

שאלה מספר 15 – חישוב גבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n! \sin(n^2)}{n^n} \quad \text{חשב את הגבול הבא:}$$

אינטגרלים לא מסוימים

שאלה מספר 16 – פירוק לשברים חלקיים

חשב את האינטגרל הבא: $\int \frac{8x+3}{x^2(x^2+2x+3)} dx$

שאלה מספר 17 – פירוק לשברים חלקיים

חשב את האינטגרל הבא: $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

שאלה מספר 18 – אינטגרציה בחלקים

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \ln x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \ln(4x^2 + 3) dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 19 – אינטגרלים טריגונומטריים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \tan x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 20 – אינטגרלים טריגונומטריים של פונקציות הפוכות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \arctan x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \arcsin x dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 21 – אינטגרלים מידיים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (\text{ב})$$

אינטגרלים מסוימים

שאלה מספר 22 – אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 23 – כלל לייבניץ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{t^2 + 1} dt}{\sqrt{x}}$$

חשב את הגבול הבא:

אינטגרלים מוכללים

שאלה מספר 24 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^3}} dx$

שאלה מספר 25 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

לפניך 3 אינטגרלים מוכללים: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

איזה טענה מהטענות הבאות נכונה:

(א) שלושתם מתבדרים.

(ב) שניים מתבדרים ואחד מתכנס.

(ג) שניים מתכנסים ואחד מתבדר.

(ד) שלושתם מתכנסים.

שאלה מספר 26 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$. p \in \mathbb{R} , \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (\alpha)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\sqrt[4]{x})} dx \quad (\beta)$$

$$. p \in \mathbb{R} , \int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^p} dx \quad (\gamma)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}} dx \quad (\delta)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^4} dx \quad (\epsilon)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx \quad (\zeta)$$

שאלה מספר 27 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx \quad (\text{ג})$$

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} dx \quad (\text{ד})$$

שאלה מספר 28 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים: $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^8 + \sqrt{x}} dx$